Réflexion et transmission au passage par un nœud sur une corde vibrante.

Problématique :

Un corde vibrante très longue et donc considérée comme infinie, soumise à une tension T est formée d'une corde de masse linéique μ_1 de $x = -\infty$ à $x = 0$ et d'une corde de masse linéique μ_2 de $x = 0$ à $x = +\infty$. Elle sont réunies en $x = 0$ par un nœud, considéré comme une masse ponctuelle M. Les vitesses de propagation des ondes à gauche et à droite du nœud sont notées respectivement $c_1 = \sqrt{T/\mu_1}$ et $c_2 = \sqrt{T/\mu_2}$. Un générateur d'ondes (possiblement un agitateur cryptotrotskyste) très loin à gauche (en pratique en $x = -\infty$) crée une onde «incidente» qui, en notation complexe, s'écrit $y_i(x,t) = a \exp \jmath\omega\,(t - x/c_1)$. Arrivée sur le nœud, cette onde met celui-ci en mouvement transversal, de même pulsation que l'onde incidente, mouvement qu'on note $Y_{nœud}(t) = \underline{Y} \exp \jmath\,\omega\,t$. A sont tour, le mouvement du nœud génère deux ondes qui en partent l'une vers la gauche, appelée onde «réfléchie» et l'autre vers la droite, appelée onde «transmise», de la forme $y_r(x,t) = b \exp \jmath\omega\,(t + x/c_1)$ et $y_t(x,t) = d \exp \jmath\omega\,(t - x/c_2)$ en faisant attention que l'onde transmise se propage dans un milieu où la vitesse est c_2 et que l"onde réfléchie va vers la gauche, d'où $t + x/c$. Par linéarité, on se doute que b et d sont proportionnels à a ; il est donc plus pertinent de définir les «coefficients de réflexion et de transmission» par $r = b/a$ et $t = d/a$ qui permet de réécrire $y_r(x,t) = r\,a \exp \jmath\omega\,(t + x/c_1)$ et $y_t(x,t) = t\,a \exp \jmath\omega\,(t - x/c_2)$ et de même $Y_{nœud}(t) = \lambda\,a \exp \jmath\,\omega\,t$. On se propose dans cet exercice de calculer r et t en fonction de la pulsation ω de l'onde et des caractéristiques c_1, c_2 et M de la corde.

Analyse a priori de quelques cas particuliers :

- Si $\mu_1 = \mu_2$ et $M = 0$, alors il s'agit d'une corde simple, sans nœud ni changement de masse linéique au passage par $x = 0$; l'onde incidente suit son petit bonhomme de chemin et se confond donc avec l'onde transmise et il n'y a pas de réflexion. On doit donc trouver $r = 0$ et $t = 1$.
- Si $M = \infty$, le nœud infiniment inerte ne bouge pas et donc ne génère pas d'onde transmise, donc $t = 0$; d'autre part en $x = 0$, l'onde réfléchie doit annuler par addition l'onde incidente puisque le nœud est immobile, donc $r = -1$.
- Si $\mu_2 = \infty$, la partie droite de la corde ne bouge pas, ni le nœud par continuité ; on est ramené au cas qui précède.

Etude du cas général :

La résolution de cet exercice, comme de tous ceux qui porteront sur la même problématique de réflexion et transmission, repose sur l'exploitation de continuités préalablement justifiées.

Ici, la première continuité est évidente : le nœud a pour fonction de solidariser les deux demi-cordes ; il en résulte que la fonction déplacement $y(x,t)$ est continue en $x = 0$ et s'y confond avec le mouvement du nœud, donc :

$$\lim_{x\to 0^-} y(x,t) = \lim_{x\to 0^+} y(x,t) = Y_{nœud}(t)$$

où, pour $x > 0$, on a $y(x,t) = y_t(x,t)$. Mais pour $x < 0$, il se propage sur la corde l'onde incidente et l'onde réfléchie ; dans un contexte linéaire, il faut comprendre que le déplacement $y(x,t)$ observé est la somme de $y_i(x,t)$ et de $y_r(x,t)$ et qu'il est impossible d'observer séparément l'un ou l'autre de ces deux termes. Donc

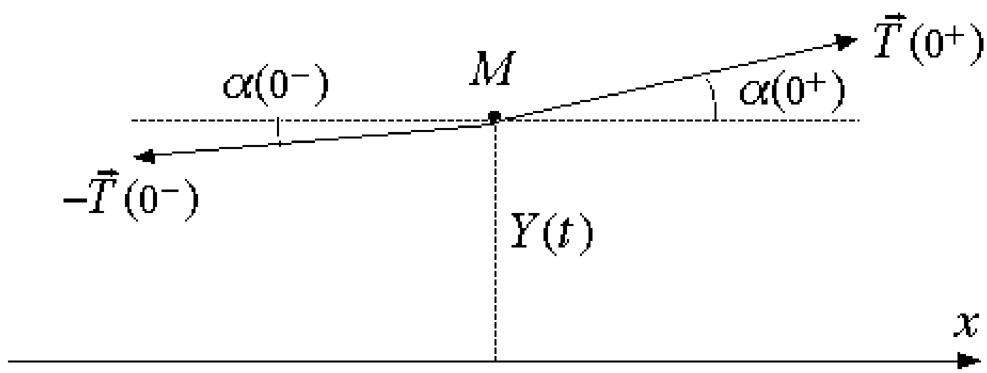
$$\lim_{x\to 0^-} (y_i(x,t) + y_r(x,t)) = \lim_{x\to 0^+} y_t(x,t) = \underline{Y} \exp \jmath\,\omega\,t$$

$$\lim_{x\to 0^-} (a \exp \jmath\omega\,(t - x/c_1) + r\,a \exp \jmath\omega\,(t + x/c_1)) = \lim_{x\to 0^+} t\,a \exp \jmath\omega\,(t - x/c_2) = \lambda\,a \exp \jmath\,\omega\,t$$

$$a \exp \jmath\,\omega\,t + r\,a \exp \jmath\,\omega\,t = t\,a \exp \jmath\,\omega\,t = \lambda\,a \exp \jmath\,\omega\,t$$

d'où, après simplifications, $\boxed{1 + r = t = \lambda}$

La seconde relation est plus subtile : le nœud est soumis à son poids, négligeable devant les tensions, une tension $\overrightarrow{T}(0^+)$ de la part de la demi-corde à sa droite et une tension $-\overrightarrow{T}(0^-)$ de la part de la demi-corde à sa gauche. Si le vecteur $\overrightarrow{T}$ était continu, le bilan des forces serait nul et le nœud ne pourrait avoir un mouvement sinusoïdal. On reprend alors le raisonnement du cours avec un $\overrightarrow{T}(0^+)$ faisant l'angle $\alpha(0^+)$ avec Ox et de module $T(0^+)$ et un $-\overrightarrow{T}(0^-)$ faisant l'angle $\alpha(0^-)$ avec Ox et de module $T(0^-)$ et l'on projette sur les deux axes le principe fondamental de la dynamique, appliqué au nœud ponctuel de masse M, de mouvement sinusoïdal parallèlement à Oy.



$$\begin{cases} T(0^+)\,\cos\alpha(0^+) - T(0^-)\,\cos\alpha(0^-) = 0 \\ T(0^+)\,\sin\alpha(0^+) - T(0^-)\,\sin\alpha(0^-) = M\,\frac{\mathrm{d}^2 Y_{n\oe ud}}{\mathrm{d}t^2} \end{cases}$$

et puisque les angles sont petits, on peut assimiler $\cos\alpha$ avec 1 et $\sin\alpha$ avec α, d'où

$$\begin{cases} T(0^+) - T(0^-) = 0 \\ T(0^+)\,\alpha(0^+) -\,\sin\alpha(0^-) = -M\,\omega^2\,Y_{n\oe ud} = -M\,\omega^2\,\lambda\,a\,\exp\jmath\,\omega\,t \end{cases}$$

la première ligne montre que le module de la tension ne change pas au niveau du nœud, on note donc T la valeur commune ; la seconde en se souvenant que $\frac{\partial y}{\partial x} = \tan\alpha \approx \alpha$ devient

$$T\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\partial y}{\partial x} - \lim_{x\to 0^-}\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -M\,\omega^2\,\lambda\,a\,\exp\jmath\,\omega\,t$$

pour $x > 0$

$$y(x,t) = y_t(x,t) = t\,a\,\exp\jmath\,\omega\,(t - x/c_2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\jmath\,\omega}{c_2}\,t\,a\,\exp\jmath\,\omega\,(t - x/c_2)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\jmath\,\omega}{c_2}\,t\,a\,\exp\jmath\,\omega\,t$$

pour $x < 0$

$$y(x,t) = y_i(x,t) + y_r(x,t) = a\,\exp\jmath\,\omega\,(t - x/c_1) + r\,a\,\exp\jmath\,\omega\,(t + x/c_1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\jmath\,\omega}{c_1}\,a\,\exp\jmath\,\omega\,(t - x/c_1) + \frac{\jmath\,\omega}{c_1}\,r\,a\,\exp\jmath\,\omega\,(t + x/c_1)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\jmath\,\omega}{c_1}\,a\,\exp\jmath\,\omega\,t + \frac{\jmath\,\omega}{c_1}\,r\,a\,\exp\jmath\,\omega\,t$$

on reporte ces deux expressions et, après simplification $\boxed{\jmath\,T\,\omega\,(-\frac{t}{c_2} + \frac{1}{c_1} - \frac{r}{c_1}) = -M\,\omega^2\,\lambda}$ ou encore $\boxed{\frac{1-r}{c_1} = \frac{t}{c_2} + \frac{\jmath\,M\,\omega\,\lambda}{T}}$ on doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} 1 + r = t = \lambda \\ \frac{1-r}{c_1} = \frac{t}{c_2} + \frac{\jmath\,M\,\omega\,\lambda}{T} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ \frac{1-r}{c_1} = \left(\frac{1}{c_2} + \frac{\jmath\,M\,\omega}{T}\right)\,t \end{cases}$$

d'où l'on tire aisément

$$\begin{cases} t = \dfrac{\frac{2}{c_1}}{\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{\jmath\, M\,\omega}{T}} \\ \\ r = \dfrac{\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_2}-\frac{\jmath\, M\,\omega}{T}}{\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\frac{\jmath\, M\,\omega}{T}} \end{cases}$$

On n'oublie pas de vérifier que ces expressions sont conformes aux prédictions dans les trois cas particuliers étudiés plus haut, vérification qui ne pose aucun problème et que l'on passe ici sous silence, sauf peut-être à dire que si $\mu_2 = \infty$ alors $1/c_2 = \sqrt{\mu_2/T} = \infty$

Analyse en terme de filtre :

Vis à vis de la transmission, il est clair que le module de t décroît quand ω croît et tend vers 0 quand ω tend vers l'infini ; on a donc un comportement passe-bas. l'identification de t avec la forme canonique

$$\mathcal{H} = \frac{G_0}{1 + \jmath\,(\omega/\omega_c)}$$

permet d'affirmer que

$$G_0 = \frac{\frac{2}{c_1}}{\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}}$$

$$\omega_c = \frac{T}{M}\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}\right)$$